Lec 27 一阶常微分方程

27.1 常微分方程

现有位置函数 $y(x)$ 的导数的方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ 称为常微分方程, 记作 ODE. 当方程中最高阶导数 $y^{(n)}$ 的阶数为 n 时, 称为 n 阶 ODE.

例 27.1 求微分方程 $y'=1+x^2$, 在初始条件 $y|_{x=0}=y(0)=3$ 下的解.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x^2 \Rightarrow \mathrm{d}y=(1+x^2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \displaystyle\int \mathrm{d}y=\int(1+x^2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow y=x+\dfrac{x^3}{3}+C$. 代入初始条件 $y(0)=3$, 得 $C=3$, 所以 $y=x+\dfrac{x^3}{3}+3$.

27.2 可分离变量的 ODE

命题 27.1 (可分离变量的 ODE 的解法)

设微分方程形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)$, 则称为可分离变量的 ODE.

1. 设 $h(y)=0$ 有实根 $y=y_1,y=y_2,\cdots,y=y_n$, 则 $y=y_1,y=y_2,\cdots,y=y_n$ 是微分方程的特解.
2. 设 $y\neq y_m, m=1,2,\cdots,n, h(y)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\,\mathrm{d}x$. 两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\,\mathrm{d}x$. 即求 ODE 的通解.

注 ODE 的通解未必包含所有解.

例 27.2 求 ODE:$y'-\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^x=0$ 的通解.

解 $y'=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-y}-1)$ 是可分离变量的 ODE.

1. 当 $\mathrm{e}^{-y}-1=0$ 时, 即 $y=0$, 是 ODE 的特解.
2. 当 $\mathrm{e}^{-y}-1\neq 0$ 时, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{-y}-1}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{-y}-1}=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\ln|\mathrm{e}^{-y}-1|=\mathrm{e}^x+C \Rightarrow \mathrm{e}^{-y}-1=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x-C} \Rightarrow y=\ln(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x-C}+1)$.

我们有时候会将 e^{-C} 合并为一个常数 C_1, 所以 $y=-\ln(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x-C}+1)=-\ln(C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}+1)$. 不合并也没有关系. 然后注意到当 $C_1=0$ 时, 解 $y=0$ 是 1 中所述的解, 因此可以将两个分类结果合并为 $y=-\ln(C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}+1)$.

注 助教注: 我们有时候会符号滥用, 写出 $y=\ln(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x-C})=\ln(1+C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x})$. 两个式子中的 C 意义不同, 但是由于我们更关心解的形式的其他部分而不关心这个积分常数, 所以会出现这种滥用.

27.3 齐次方程

命题 27.2 (教材 P219: 齐次方程的解法)

一个函数 $f(x,y)$ 称为 n 次齐次函数, 如果对某个范围内的 x,y 与 t 有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

一阶微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

称为齐次的, 如果函数 P 和 Q 是同次的齐次函数. 现在 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 0 次齐次函数, 因此它可以写为 $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式. 于是上述的齐次微分方程可化为形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

为了解方程 (5), 我们引入新的未知函数

$$y=ux,\quad \text{从而}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

于是方程 (5) 变成

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u. \tag{6}$$

方程 (6) 可分离变量, 成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分, 得到

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C,$$

其中 C 是任意常数. 求出式左边的不定积分后, 再用 $\dfrac{y}{x}$ 代换其中的 u, 即得方程 (5) 的通解. 注意, 若 $\varphi(u)-u$ 有一个实零点 u_0, 则 $y=u_0x$ 就是该方程的一个特解, 应当补上. ♠

例 27.3

1. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.
2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y-xy}$.

解

1. 在其中令 $y=ux$, 并分离变量, 得出

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C_1,$$

其中 C_1 是任意常数. 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上述式, 得出原方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}},$$

其中 $C = e^{-C_1}$.

若采用极坐标, 则该通解可写成

$$r = Ce^{\theta},$$

这表示平面上一族以原点为中心的对数螺线.

2. 令 $y = ux$, 得出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{2u^2 - u}{1 - u + u^2}$, 分离变量得到

$$\frac{1 - u + u^2}{u(u-1)(u-2)}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$u = 0, 1, 2$ 是特解, 其余的解为

$$-\frac{1}{2}\ln u - \ln(u-1) + \frac{3}{2}\ln(u-2) = \ln\frac{C}{x},$$

其中 C 是任意常数. 将 $u = \dfrac{y}{x}$ 代入上述式, 得出原方程的通解为

$$\frac{(u-2)^{\frac{3}{2}}}{(u-1)\sqrt{u}} = \frac{C}{x},$$

整理得到

$$\frac{(y-2x)^{\frac{3}{2}}}{(y-x)\sqrt{y}} = \frac{C}{x}.$$

27.4 一阶线性微分方程

命题 27.3

如果一阶微分方程中的未知函数 y 及其导函数 y' 都是一阶的, 则方程为一阶线性方程, 它可化为标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x). \tag{7}$$

若右端的 $Q(x)$ 恒为零, 则方程称为（一阶）线性齐次方程; 否则, 方程称为（一阶）线性非齐次方程. 注意, 这里“齐次”的含义与前面讨论的完全不同.

线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0 \tag{8}$$

的求解是相当容易的, 因为这是一个可分离变量方程: 当 $y \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\ln|y| = -\int P(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

由此得

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}, \quad 其中 \quad C = \pm\mathrm{e}^{C_1}(\neq 0).$$

显然 $y=0$ 是方程 (8) 的解, 在上面的通解中让 $C=0$ 就得到了这个解, 因此线性齐次方程 (8) 的通解（也是全部解）为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \quad (C\text{为任意常数}). \tag{9}$$

现在来解非齐次方程 (7), 由于不能直接用分离变量法, 这里采用下面的办法：设 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 为 $P(x)$ 的任一确定的原函数, 在 (7) 两边乘上 $\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 则所得的结果可变形为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

两边积分即得

$$y\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C,$$

即方程 (7) 的通解（其中 C 为任意常数）为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]. \tag{10}$$

♠

例 27.4 解二阶线性 ODE: $y'' = \frac{y'}{x} + x, (x \neq 0)$.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = p' = \frac{p}{x} + x \Rightarrow p' - \frac{p}{x} = x$. 这是一个一阶线性 ODE, 所以我们可以用一阶线性 ODE 的解法解出 p.

1. 首先解齐次方程 $p' - \frac{p}{x} = x$, 得 $p = x^2 + xC_1$.
2. 然后解 $y' = x^2 + xC_1$, 得 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}C_1 + C_2$.

例 27.5 解:$y' = \frac{y}{x+y^3}$.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}x = y^2$. 由公式得 $x(y) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(\int y^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right) = y\left(\frac{y^2}{2} + C\right)$.

27.5 Bernoulli 方程

命题 27.4 (Bernoulli 方程的解法)

微分方程若形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1 \text{ 的实数}, \tag{12}$$

则称为 Bernoulli 方程.

解方程 (12) 可采用下面的方法：先以 y^n 除方程的两边, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

再作代换 $u = y^{1-n}$, 则方程化为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

由此就易求出方程 (12) 的通解.

♠

例 27.6 求 $y' = y\tan x + y^2\cos x$ 的通解.

解 令 $y^{-1} = u \Rightarrow u' + \tan xu = -\cos x$. 解一阶线性 ODE 得 $y^{-1} = u = -x\cos x + C\cos x$. 所以 $y = \dfrac{1}{-x\cos x + C\cos x}$.

✍ **作业** ex6.1:1(1)(4),2(2)(4),4(1)(4),5(1)(2).